

## 第四章课后习题答案

1、略。

2、证明:

以 GARCH (1, 1) 模型为例, GARCH (1, 1) 模型的均值方程和条件方差方程为:  $r_t = \mu_t + \varepsilon_t$ ,

$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$ ,  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ 。计算无条件均值为  $E(\varepsilon_t) = 0$ , 无条件方差为

$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) = E(\omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2)$ , 即  $Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$  为常数。

3、略。

4、解:

(1) 由  $E(\varepsilon_t) = E[E(\varepsilon_t | \Phi_{t-1})] = E[\sigma_t E(e_t | \Phi_{t-1})] = 0$  可知,  $\varepsilon_t$  的无条件均值为 0。其次  $\varepsilon_t$  的无条件方差是  $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E[E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1})] = E(\sigma_t^2) = E[\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$ , 因为  $\varepsilon_t$  是平稳过程且  $E(\varepsilon_t) = 0$ , 因此有  $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ ,  $Var(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(\varepsilon_t)$ , 即  $Var(\varepsilon_t) = \alpha_0 / (1 - \alpha_1)$ 。为研究  $\varepsilon_t$  的尾部性质, 我们要求  $\varepsilon_t$  的四阶矩是有限的, 由于  $e_t$  是一个白噪音, 因此,  $E(e_t^4 | \Phi_{t-1}) = 3$ ,  $E(\varepsilon_t^4 | \Phi_{t-1}) = E(\sigma_t^4 e_t^4 | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^4 E(e_t^4 | \Phi_{t-1}) = 3\sigma_t^4$ , 无条件的四阶矩为  $E(\varepsilon_t^4) = E[E(\sigma_t^4 | \Phi_{t-1})] = 3E[(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2] = 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^4)]$ 。因为  $\varepsilon_t$

是四阶平稳的, 即  $E(\varepsilon_t^4) = E(\varepsilon_{t-1}^4)$ , 则  $(1 - 3\alpha_1^2)E(\varepsilon_t^4) = 3\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}\right)$ , 即

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}。$$

(2) 由  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$  可知, 对给定的样本,  $\varepsilon_t^2$  是  $\sigma_t^2$  的无偏估计。因此, 我们期望  $\varepsilon_t^2$  以 1 阶自回归模型的方式与  $\varepsilon_{t-1}^2$  线性相关。从另一个角度, 定义  $\eta_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ , 那么可以证明  $\{\eta_t\}$  是均值为零的不相关序列, 于是 ARCH 模型变为:  $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_t$ , 这就是  $\varepsilon_t^2$  表示成 AR

(1) 的形式, 但是  $\{\eta_t\}$  不是独立同分布的序列。

5、略。

6、略。

7、略。

8、略。

9、略。

10、略。