第七章 课后习题

1、 现代投资组合理论与传统投资组合理论有哪些异同？

答：**传统投资组合理论和现代投资组合理论的主要区别**

	1953 年以前的投资组合理论	现代投资组合理论
风险的分散	可以消除	无法消除系统风险
协方差	风险独立, 不存在协方差	有
衡量方法	无统一的衡量方法	均值-方差

相同点：都强调分散化投资。

2、 资本资产定价模型的假设是什么？它与套利定价理论有何区别与联系？

（1）资本资产定价模型的前提假设如下：

1）影响投资决策的因素是期望收益率以及风险，风险用标准差来表示。此外，遵循马科维茨投资组合选择模型来做出投资决策。

2）投资者均是理性的，风险相同条件下选择收益率较高的证券；收益率相同下选择风险较小的证券。

3）所有投资者均事前知道投资收益率的概率分布为正态分布，且对证券收益率概率分布看法一致即有效前沿只有一条。所有投资者的投资期限相同只有一期。

4）所有证券投资可以无限制细分，且投资者可以无风险收益率无限制地借贷。

5）资本市场是完全有效的市场，税收交易费用不需要考虑且所有投资者可以免费获得市场上所有的信息。

6）投资者具有相同的预期，对预期收益率，标准差以及证券之间的协方差具有相同的预期值。

（2）APT 与 CAPM 的区别主要表现在以下几个方面：

1）对风险的解释程度不同。CAPM 模型中使用 bata（单个证券或组合对市场收益变动的敏感程度）衡量风险，是一种单因素模型，它只能告诉投资者风险的大小，却不能告诉投资者风险的来源。套利定价模型则是一个多因素模型，它告诉了投资者具体的系统性风险是什么并且告诉了具体的系统性风险的影响程度。

2）CAPM 模型是均衡定价模型，APT 模型非均衡定价模型，此为两者间的本质区别。且两者达到均衡的方式不同，资本资产定价模型强调理性的投资者与同质预期，因此人们在选择证券时只会接受相同风险收益率最高的或相同收益率风险最低的证券，同时放弃高风险低收益的项目，直到项目达到市场的平均收益水平。套利定价模型则是一种套利均衡机制，认为市场上的理性投资者只占一部分，他们会利用市场的存在的套利机会获取无风险收益，最终实现市场均衡。

3）CAPM 模型对证券收益率的分布以及个体的效用函数做了假设，而套利定价模型并没有这方面的假设。

4）适用性与实用性不同。CAPM 模型适用范围较广，特别是一些对资本成本数额精确度要求较弱的企业，但实用性较弱，因为对风险的解释程度低且假设条件较为苛刻。APT 模型适用性较弱实用性较强。

（3）APT 与 CAPM 的联系主要表现在以下两个方面：

1）都包含以下假设：第一，投资者有相同预期；第二，投资者追求效用最大化；第三，资本市场是完备的。

2）当市场收益率为唯一因子时，APT 模型的表达式与 CAPM 模型相同。因此，CAPM 模型可以看作是添加了部分约束后的 APT 模型的一个特例。

3、 试比较 CML 与 SML 有何异同。

（1）CML 与 SML 的区别

1）纵轴不同。CML 纵轴是组合的期望收益率，反映投资者投资后期望获得的收益。而 SML 纵轴是任何单个证券或组合的要求收益率，反映投资者投资前要求得到的最低收益率。

2）横轴不同。CML 横轴是标准差，既包括系统性风险又包括非系统性风险；SML 横轴是β系数，只包括系统性风险。

3）作用不同。CML 作用是确定投资组合的比例；SML 作用是根据必要收益率，利用股票估价模型来计算股票的内在价值。

4）对于 CML，只有有效组合才落在资本市场线上；对于 SML，任何组合（包括非有效组合）都落在证券市场线上。

（2）CML 与 SML 的联系

CML 与 SML 也存在一定的联系，即落在资本市场线上和线外的组合都会落在证券市场线上，CML 可看作是 SML 的特例。

4、 如何评价资本资产定价模型？

（一）CAPM 模型的优点

CAPM 模型作为现代金融投资理论的核心，在投资决策和公司金融中得到了广泛运用。可将其优点总结如下：

（1）简单、明确。此为 CAPM 模型最大的优势。它将任何风险证券价格影响因素简单地归纳为无风险收益率、风险的价格及风险的计算单位。并创造性地提出了证券价格地定价公式，在资产配置及资产估值方面受到了广泛应用。

（2）实用性。虽然投资者无法用β值预测单个股票的变化趋势，但投资者可通过β值判断股票的波动大小，从而在不同的市场形势中选择不同β值股票进行资产配置。这一实用发现在今天仍为广大投资者所应用。

（二）CAPM 模型的缺点

事实上，CAPM 模型并不是完美的，它本身也有一定的局限，具体表现在：

（1）前提假设难以实现。由于 CAPM 是建立在投资组合理论的基础上，因此其假设前提比马科维茨投资组合理论的假设还要严苛。比如资本市场是完全有效的市场的假设就与现实不符，我们知道现实市场往往存在信息不对称，投资者难以获得全部有效信息。再比如投资者也不可能具有相同的预期，因为投资者所接收到的信息不一致，这种情况下显然投资者无法形成一致的预期。市场不存在交易费用、投资者可以不受限制以无风险利率借贷等假设也与现实不符。

（2）难以确定β值大小。一方面某些证券缺乏历史数据，不易估计其β值；另一方面，市场又是瞬息万变的，各种证券β值也会随之发生变化。根据历史数据估算出的β值对未来证券买卖的指导作用也因此受到影响。

（3）难以进行实证检验。对于 CAPM 的定量检验，也存在大量的检验结果不支持该理论。对资本资产定价模型持最激烈批评态度的就是经济学家罗尔(Richard Roll)。1977 年，罗尔在《金融经济学学刊》上发表了《对资产定价理论检验的批判，第一部分:论该理论的过去与潜在可检验性》一文，对 CAPM 的适用性提出了质疑，他认为，CAPM 是一个以市场资产组合的存在为前提的一般均衡理论模型，但市场资产组合时一个不明确、不可预测以及没有明确定义的概念，所以以此为基础进行实证检验当然无法验证 CAPM 的正确性。

5、假设有一投资者计划投资于某一市场，市场上有 A、B 两种证券，其预期收益率分别为 11%和 13%，标准差分别为 15%和 20%。A、B 两种证券的相关系数为 0.25。市场无风险利率为 6%。求该投资者最优风险组合构成。

答：由题意可知，$\overline{R_A} = 11\%$　$\overline{R_B} = 13\%$, $\sigma_A = 15\%$　$\sigma_B = 20\%$,$R_f = 6\%$，　$\rho_{AB} = 0.25$

我们的目标是求$\max_{X_A, X_B} \dfrac{\overline{R}_p - r_f}{\sigma_1}$其中：

$$\overline{R}_1 = X_A \overline{R}_A + X_A \overline{R}_B$$

$$\sigma_1^2 = X_A^2 \sigma_A^2 + X_B^2 \sigma_B^2 + 2 X_A X_B \rho \sigma_A \sigma_B$$

约束条件是：$X_A + X_B = 1$。这是标准的求极值问题。通过将目标函数对X_A求偏导并令偏导等于 0，我们就可以求出最优风险组合的权重解如下：

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{\left(\overline{R}_A - r_f\right)\sigma_B^2 - \left(\overline{R}_B - r_f\right)\rho\sigma_A\sigma_B}{\left(\overline{R}_A - r_f\right)\sigma_B^2 + \left(\overline{R}_B - r_f\right)\sigma_A^2 - \left(\overline{R}_A - r_f + \overline{R}_B - r_f\right)\rho\sigma_A\sigma_B} \\ &= \frac{(11\% - 6\%)\times 0.2^2 - (13\% - 6\%)\times 0.25 \times 0.20 \times 0.15}{(11\% - 6\%)\times 0.2^2 + (13\% - 6\%)\times 0.15^2 - (11\% - 6\% + 13\% - 6\%)\times 0.25 \times 0.20 \times 0.15} \\ &= 55.14\% \end{aligned}$$

$$X_B = 1 - X_A = 44.86\%$$

6、下表给出了一证券分析家预期的两个特定市场收益情况下的两支股票的收益情况，如下：

市场收益（%）	激进型股票（%）	防守型股票（%）
5	-2	5
25	30	12

（1） 两支股票的β值是多少？

答：β 是股票收益对市场收益的敏感程度，即是市场收益每变化一单位股票收益的相应变化。因此，可以通过计算两种情况下股票的收益差除以市场的收益率来计算该股票的 β 值：

激进型股票：$\begin{cases} -0.02 = r_f + \beta_A(0.05 - r_f) \\ 0.3 = r_f + \beta_A(0.25 - r_f) \end{cases}$，解得：$\beta_A = 1.6$

同理，可求得防守型股票 $\beta_B = 0.35$

（2） 如果市场收益为 5%和 25%的可能性相同，两只股票的预期收益率是多少？

答：在两种情形可能性相等的情况下，期待收益是两种可能结果的平均数：

$$E(R_A) = 0.5 \times (-0.02 + 0.3) = 14\%$$

$$E(R_B) = 0.5 \times (0.05 + 0.12) = 8.5\%$$

（3） 如果国库券利率为 6%，市场收益为 5%和 25%的可能性相同，请画出这个经济体系的证券市场线（SML）。

答：证券市场线由市场期望收益 0.5×（0.25+0.05）=15%决定，此时$\beta_M = 1; r_f = 6\%, \beta_f = 0$。

证券市场线的方程为：$E(\mathrm{r}) = 0.06 + \beta \times (0.15 - 0.06) = 0.06 + 0.09\beta$

7、一种风险资产组合的年末现金流可能为 60000 元或 20000 元，概率相同，均为 0.5；市场无风险利率为 5%。

（1）若投资者要求 7%的风险溢价，则投资者愿意支付多少钱去购买该资产组合？

答：该风险资产年末的价值为：60000*0.5+20000*0.5=40000

如果投资者要求的风险溢价为 7%，则要求的收益率为 5%+7%=12%。

投资者愿意支付的价格为：40000/(1+12%)=35714.29

（2）若投资者可以购买（1）中的资产组合数量，该投资的期望收益率为多少？

答：投资者在年末的现金流为：[60000-40000/(1+12%)]*0.5+[20000-40000/(1+12%)]*0.5=A

投资的期望收益率为：[A-40000/(1+12%)]/40000/(1+12%)=B

（3）假定现在投资者要求 12%的风险溢价，则投资者愿意支付的价格是多少？

答：该风险资产年末的价值为：60000*0.5+20000*0.5=40000

如果投资者要求的风险溢价为 7%，则要求的收益率为 5%+12%=17%。

投资者愿意支付的价格为：40000/(1+17%)=34188.03

（4）比较（1）和（2）的答案，关于投资所要求的风险溢价与售价之间的关系，投资者有什么结论？

答：投资所要求的风险溢价与售价之间呈负相关关系。即投资所要求的风险溢价越高，风险资产售价越低；投资所要求的风险溢价越低，风险资产售价越高。

8、某基金经理考虑投资于三个共同基金:股票型基金(A)，公司债基金 (B)，以及短期国债货币基金，风险组合的收益、标准差如下所示

	期望收益率%	标准差%
股票基金（A）	20	30
债券基金（B）	12	15
短期国债货币基金	8	0

基金收益率之间的相关关系为 0.1，请回答如下问题:

（1） 两种风险基金 A 和 B 的最小方差投资组合比例是多少?

答：由$w_A+w_B=1$， $\sigma_{AB}^2=w_A^2\sigma_A^2+w_B^2\sigma_B^2+2w_Aw_Bcov_{AB}$

化简得$w_A=\frac{\sigma_B^2-cov_{AB}}{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2cov_{AB}}$=0.1739 ，$w_B=1-w_A=0.8261$

（2） 上述投资组合的收益率期望值和标准差各是多少?

答：$R_p=w_AR_A+w_BR_B=13.39\%$ ，$\sigma_{AB}=\sqrt{w_A^2\sigma_A^2+w_B^2\sigma_B^2+2w_Aw_Bcov_{AB}}=13.92\%$

（3） 如果投资者的投资组合的期望收益率是 14%，是有效的，并且在最优可行资本市场线上，请问该投资组合的标准差是多少?

答：如果要求资产组合的平均收益率为 14%，可以从最优资本配置线上找到相应的标准差。资本配置线公式为：$E(R_c)=R_f+\frac{E_{(R_P)}-R_f}{\sigma_f}\sigma_c=0.08+0.4601\sigma_c$。令$E(R_c)=14\%$，此时投资组合的标准差为 13.03%。

9、假定股票收益以市场指数作为共同因素，经济体系中所有的股票对市价的指数的贝塔值为 1.0，个股的非系统性风险(标准差)为 30%。如果证券分析师研究了 20 种股票，结果发现一半股票的阿尔法值为 2%，另一半为-2%。分析师买进 100 万美元的等权重正阿尔法的股票资产组合，同时卖空 100 万美元的等权重负阿尔法的股票资产组合。

（1）该组合的期望收益是多少?

答：卖空一组由 10 只负阿尔法值得股票等权重组成得资产组合，同时将资金投资于一组由 10 只正阿尔法值得股票等权重组成的资产组合，将消除市场敞口，产生一个零投资资产组合。用R_M表示系统的市场因素，则预期的美元收益为：

1000000×[0.02+(1.0×R_M)]-1000000×[(-0.02+(1.0×R_M)]=1000000×0.04=40000 美元

（2）该投资组合是否还存在系统风险?简述理由

答：该组合的回报对市场因素的敏感度为零，因为正 α 和负 α 股票的风险暴露相互抵消。因此，总风险中市场因素也是零，然而分析师利润的方差不为零，因为资产组合没有充分分散化。

（3）该组合的标准差是多少

答：对于 n=20 只股票（买多 10 只股票，卖空 10 只股票），投资者在每只股票中拥有 10 万美元的头寸。净市场风险暴露是零，但公司特有风险还没有得到充分分散。以美元计 20 只股票资产的收益方差为：20×[（100000×0.30）^{2}]=18000000000，则美元收益的标准差为 134164 美元。

10、市场上两个给定市场状况下，市场收益率以及两只股票（A 和 B）的期望收益率，如下表所示:

	市场收益率	激进型股票(A)	保守型股票(B)
市场状态 1	5%	-2%	6%
市场状态 2	25%	38%	12%

(1) 两只股票的β值各是多少?

答：β 是股票收益对市场收益的敏感程度，即是市场收益每变化一单位股票收益的相应变化。因此，可以通过计算两种情况下股票的收益差除以市场的收益率来计算该股票的 β 值：

$$\beta_A=\frac{-0.02-0.38}{0.05-0.25}=2$$

$$\beta_B=\frac{0.06-0.12}{0.05-0.25}=0.3$$

(2) 如果两种市场状况的可能性相同，请问两只股票的期望收益率各是多少?

答：在两种情形可能性相等的情况下，期待收益是两种可能结果的平均数：

$$E(R_A)=0.5\times(-0.02+0.38)=0.18=18\%$$

$$E(R_B)=0.5\times(0.06+0.12)=0.09=9\%$$

(3) 如果国债利率为 6%，两种状况的可能性相同，请给出整个市场状态的证券市场线。

答：证券市场线由市场期望收益 0.5×（0.25+0.05）=15%决定，此时$\beta_M=1;r_f=6\%,\beta_f=0$。

证券市场线的方程为：$E(\mathrm{r})=0.06+\beta\times（0.15-0.06）$

(4) 两只股票的α值各是多少?

答：基于它的风险，激进型股票有一个要求期望收益率：

$$E(r_A)=0.06+2.0\times(0.15-0.06)=0.24=24\%$$

但是分析家预测的期望收益是 18%。因此股票 A 的 α 为：

$$\alpha_A=\text{实际期望收益}-\text{必要收益}=18\%-24\%=-6\%$$

同理，防守型股票的必要收益为：$E(r_B)=0.06+0.3\times(0.15-0.06)=0.087=8.7\%$

分析家预测的期望收益是 9%。因此股票 B 有一个正的 α 值：

$$\alpha_B=\text{实际期望收益}-\text{必要收益}=9\%-8.7\%=0.3\%$$

11、假定无风险收益率R_f为 7%，投资人最优风险资产组合的预期收益率$E(R_t)$为 16%，标准差 20%，试求：

（1）投资人承担一单位风险需要增加的预期收益是多少？

（2）假设投资人需要构造标准差 9%的投资组合，则投资于最优风险资产组合的比例是多少，构建后的投资组合预期收益率是多少？

（3）假设投资人需要构造预期收益率 20%的投资组合，则如何分配最优风险资产组合和无风险证券的比例？

答：（1）$\dfrac{r_i - r_f}{\sigma_i} = \dfrac{16\% - 7\%}{20\%} = 0.45$，一单位风险需要增加的预期收益 0.45 单位。

（2）由 $\sigma_{\mathrm{p}}^2 = \mathrm{w}_{\mathrm{s}}^2 \sigma_{\mathrm{s}}^2$，得 $\mathrm{w}_{\mathrm{s}} = 45\%$，投资于最优风险资产组合的比例是 45%，构建后得预期收益为$R_p = w_S R_S + w_f R_f$ =0.45*16%+0.55*7%=11.05%

（3）假设投资人需要构造预期收益率 10%的投资组合，则如何分配最优风险资产组合和无风险证券的比例？

由$R_p = w_S R_S + w_f R_f$，且$w_f = 1 - w_S$，代入数据得$w_S = 33.3\%$，则$w_f = 1 - w_S = 66.6\%$。

12、假设单个资产的收益由如下两因子模型产生，

$$R_{it} = E(R_{it}) + \beta_{1t} F_{1t} + \beta_{2t} F_{2t}$$

其中，R_{it} 是资产 i 在 t 期的收益率；F_{1t} 和 F_{2t} 是两个预期收益率和方差均为 0 的市场因子。此外，假设一个资本市场上存在如下两种资产 A 与 B，不考虑交易成本。

	$E(R_{it})$	β_1	β_2
A	10%	1	0.6
B	10%	1.4	0.8

（1）假设该资本市场允许卖空，请构建一个包含资产 A 和资产 B 的资产组合，使得组合收益与市场因子 F_{it} 无关。计算该组合的预期收益率与 β_2 系数。

（2）假设存在这样一个无风险资产，其预期收益率为 6%，$\beta_1 = \beta_2 = 0$，基于问题（1）中求出的资产组合，判断是否存在套利机会并描述。

答：

（1）假设资产 A 和资产 B 的投资比率分别是：w1 和 w2，要使组合收益与市场因子 F_{it} 无关需要满足以下条件：

W1+W2=1

W1*β1+W2*β1=0

代入数据并求解得：

W1=3.5

W2=-2.5

则由资产 A 和资产 B 构成的资产组合的预期收益率=W1*E(R1)+W2*E(R1)=3.5*10%-2.5*10%=10%

β2=W1*β2+W2*β2=3.5*0.6-2.5*0.8=0.1

综上，预期收益率为 10%，β2 为 0.1

（2）根据（1）求出的资产组合，

R1t=E(R1t)+β1tF1t+β2tF2t=10%+0=10%

而无风险资产，$\beta_1=\beta_2=0$ 预期收益率为 6%

则 Rf=E(Rf)=6%，对比知该投资组合的预期收益率为 6%，实际为 10%，收益率被高估价格被低估，此时应按照市场价格抛售（1）中的资产组合，并用于购买无风险资产，如此可获得套利利润。

反复操作，被高估的资产组合价格会下降，直至平衡。

13、假设市场上有 a、b 两种证券，其预期收益率分别为 8%和 13%，标准差分别为 8%和 14%。a、b 两种证券的相关系数为 0.5，市场无风险利率为 5%。一个投资者的风险厌恶系数为 3，求该投资者的资产配置状况。

答：

依据风险资产配置原理可知：

$$X_A=\frac{\left(\overline{R}_A-r_f\right)\sigma_B^2-\left(\overline{R}_B-r\right)\rho\sigma_A\sigma_B}{\left(\overline{R}_A-r_f\right)\sigma_B^2+\left(\overline{R}_B-r_f\right)\sigma_A^2-\left(\overline{R}_A-r_f+\overline{R}_B-r_f\right)\rho\sigma_A\sigma_B}=28.93\%$$

$$\mathrm{X}_B=1-X_A=71.07\%$$

依次代入可得：

$$R_p=X_AR_A+X_BR_B=28.93\%\times8\%+71.07\%\times13\%=11.55\%$$

$$\sigma_p^2=X_A^2\sigma_A^2+X_B^2\sigma_B^2+2X_AX_B\rho\sigma_A\sigma_B=0.0127$$

因此，可得：

$$\overline{\omega}_1=\frac{R_p-R_f}{\gamma\sigma_p^2}=\frac{11.55\%-5\%}{3\times1.27\%}=171.92\%$$

$$\overline{\omega}_2=1-\overline{\omega}_1=\text{-}71.92\%$$

综上，也就是说，该投资者应借入 71.92%的无风险资金，加上自有资金全部投资于最优风险组合。其中，这部分风险资产又可以把 28.93%投资于 a 类风险资产，71.07%投资于 b 类风险资产。