第八章 课后习题

1、均值-VaR 模型对比均值-方差模型有何优点？均值-ES 呢？试着比较三者优缺点。

答：

	均值-方差	均值-VaR	均值-ES
优点	简单、实用	关注随机变量与期望值之间的下偏差而非方差所衡量的上下偏差，更加符合实际。	1、考虑了水平之上的损失情况。 2、可以反映分散化投资对金融风险的影响效应及其对降低风险的贡献,减少了对投资者进行有害激励的效应。 3、可以精确度量尾部风险。 4、测度指标具有次可加性。
缺点	1、利用方差衡量投资风险,即一旦预期收益偏离平均收益越大,则风险越大; 2、未提供衡量投资者风险厌恶程度的指标，效用函数也只是特例; 3、均值-方差模型是依据证券之间的关联性推测未来关联情况,但现实中,投资者往往存在博弈,证券之间的关联也并未稳定。	1、VAR 具有非凸及非次可加性,因此当投资组合收益的分布不服从正态或对数正态分布时，配置最优投资组合时，使用 VAR 度量风险会产生较大困难; 2、置信度越小，VaR 组合边界与标准差组合边界差异越大,主要体现在最小方差距离上。置信水平越高,表明投资者越厌恶风险,估计的风险也越大,导致最终的投资分配方案趋于保守化。	1、有时候 ES 使得保守投资者选择带有更大标准差的投资组合。尽管作为风险控制工具，VaR 有时候也会发生这种情况，但是 ES 的反作用更大，ES 起到反作用的情况也更常见; 2、没有考虑公司杠杆、规模等因素。

3、简述不可卖空情形下的投资组合确定的求解思路。它与可卖空情形下的投资组合确定有何区别与联系？

答：不可卖空情形下的投资组合确定的求解思路：先依照模型在没有施加约束时求最优化问题，如果得出结果某一支股票的权重值为负，则令其等于零，再求资金再其他风险资产上的最优化配置问题。以此类推，直至每只股票的权重都大于等于零为止。

区别：可卖空情形下。股票权重值可为负数，而不可卖空情形下，权重值介于 0 与 1 之间。

联系：确定投资组合的原理与步骤大致相同，都是求最优化配置问题。

4、试分析是否包含无风险资产对最优投资组合确定有何影响？

答：无风险贷出可视为投资于无风险资产，而无风险借入可视为卖空无风险资产，故纳入无风险资产后的投资组合确定也即纳入可借贷情形下的投资组合确定。具体来说，纳入无风险资产改变了最优投资组合的构成，使得一部分资产投资于无风险资产。另外，也改变了投资组合有效前沿。但值得注意的是，是否包含无风险资产并不影响最优风险组合的确定。

5、基于 VAR 修正的投资组合理论有何优缺点？试着简单概括一下。

优点：关注随机变量与期望值之间的下偏差而非方差所衡量的上下偏差，更加符合实际。

缺点：第一，VAR 具有非凸及非次可加性，因此当投资组合收益的分布不服从正态或对数正态分布时，配置最优投资组合时，使用 VAR 度量风险会产生较大困难；第二，置信度越小，VaR 组合边界与标准差组合边界差异越大，主要体现在最小方差距离上。置信水平越高，表明投资者越厌恶风险，估计的风险也越大，导致最终的投资分配方案趋于保守化。

6、简述最小化方差目标下的最优投资组合求解过程。

答：当投资者为极度风险厌恶者时，会以最小化方差为目标，此时方差最小的投资组合将成为他们的最优选择。构建拉格朗日函数，推导求得最小化方差目标下的最优投资组合。

令：

$$\mathrm{Min}_w \frac{1}{2}\varpi'\sum\varpi$$

s.t. $\mu_0=\varpi'\mu,\varpi'l=1,l'=[1,1,\ldots,1]$

构建拉格朗日函数： $L=\frac{1}{2}w'\sum w+\lambda\left(1-w'l\right)+\gamma\left(\mu_0-w'\mu\right)$

求解： $\frac{\partial L}{\partial w}=\sum w-\lambda l-\gamma\mu=0\Rightarrow w=\lambda\Sigma^{-1}l+\gamma\sum^{-1}\mu$

令方差最小：

$$\frac{\partial\sigma_0^2}{\partial\mu_0}=\frac{2A\mu_0-2B}{\Delta}=0$$

得 $B=A\mu_0$

代入（8-8）式中，得

$$\lambda=\frac{C-\mu_0 B}{\Delta}=\frac{C-A\mu_0^2}{\Delta}$$

$$\gamma=\frac{\mu_0 A-B}{\Delta}=0$$

$$\Delta=\left|AC-B^2\right|=AC-A^2\mu_0$$

此时，投资组合权重 $w=\lambda\Sigma^{-1}l+\gamma\Sigma^{-1}\mu=\dfrac{C-A\mu_0^2}{\Delta}\Sigma^{-1}l=\dfrac{\Sigma^{-1}l}{A}=\dfrac{\Sigma^{-1}l}{l'\Sigma^{-1}l}$

7、结合本课程最优化理论，基于风险资产的收益率和波动率风险，构建一个投资组合。

答：

举下例进行说明：

投资组合成分：002594 比亚迪　002792 通宇通讯　300096 易联众

数据：2017.11.1-2017.12.18 交易日 收益率：$\mathrm{Ln}(P_t-P_{t-1})$

范例程序：

```
opengl('save', 'software')
clear all;close all;clc;
a_ret=xlsread('002594.xlsx','b2:b35');
b_ret=xlsread('002792.xlsx','b2:b35');
c_ret=xlsread('300096.xlsx','b2:b35');
%% 第一步，计算收益率均值和协方差
%方法一：用 cov 计算协方差，用 mean 计算均值
a_v=cov(a_ret);
b_v=cov(b_ret);
c_v=cov(c_ret);
ret=[a_ret,b_ret,c_ret];
covariances=cov(ret)
returns=mean(ret)
[expsigma,expcorrc]=cov2corr(covariances);
expsigma
expcorrc

%% 第二步，计算投资组合的可行域
%首先，选择 5000 组权重
rand('state',0);
weights=rand(5000,3);
```

```
total=sum(weights,2);
total=total(:,ones(3,1));
weights=weights./total;
[portrisk,portreturn]=portstats(returns,covariances,weights);
plot(portrisk,portreturn,'.r')
title('mean-variance-efficient frontier and feasible domain')
xlabel('standard deviation');
ylabel('expected return');
%% 计算预期收益率与风险
[Portrisk, Portreturn] = portstats(returns, covariances, weights)
```

第一步：计算收益率均值和协方差

协方差矩阵：

Covariances:	002594	002792	300096
002594	10.9806	5.1305	2.6537
002792	5.1305	12.7913	4.0608
300096	2.6537	4.0608	7.5331

收益率均值：

Returns：	002594	002792	300096
	-0.0230	0.3155	-0.2206

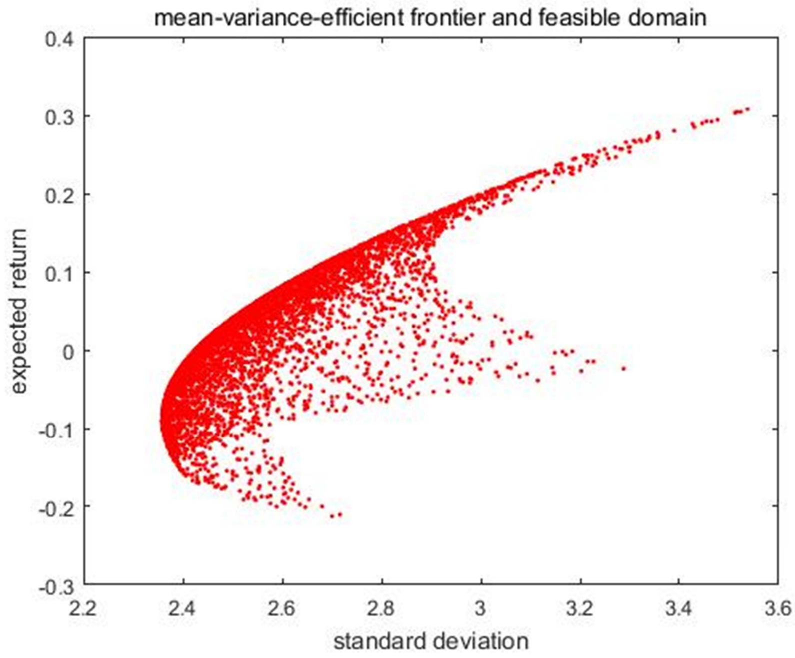
标准差：

Expsigma：	002594	002792	300096
	3.3137	3.5765	2.7446

相关系数矩阵：

Expcorrc：	002594	002792	300096
002594	1.0000	0.4329	0.2918
002792	0.4329	1.0000	0.4137
300096	0.2918	0.4137	1.0000

第二步：计算投资组合的可行域：



投资组合的标准差、预期收益率、各资产的权重：

PortRisk:	PortReturn:	PortWts:		
		002594	002792	300096
2.8978	0.0975	0.6274	0.3621	0.0105
2.6167	0.0747	0.1341	0.5013	0.3646
2.3932	-0.0262	0.3235	0.2434	0.4331
2.7183	0.1170	0.3432	0.5032	0.1537
2.5626	-0.0037	0.5481	0.2026	0.2493
2.4620	-0.0069	0.4360	0.2379	0.3261
2.3921	-0.0516	0.4012	0.1673	0.4315
3.2316	0.2383	0.0189	0.8489	0.1322
2.5472	0.0547	0.3601	0.3808	0.2591
2.4233	-0.0069	0.2268	0.3151	0.4582

2.4120	-0.0819	0.4642	0.0876	0.4482
2.6279	0.0629	0.4653	0.3573	0.1774

资料来源：根据 Matlab 程序结果导出

8、计算推导考虑借贷资本后的均值-方差、均值-VaR 以及均值-ES 模型，其有效前沿对比未考虑借贷资本的模型有何变动？

答：以考虑借贷资本后的均值-VaR 模型为例，计算推导过程如下：

$$MinVaR = Z_\alpha\sigma + \mu_0 = Z_\alpha\sqrt{w'\Sigma w} + \mu_0$$

当 $w'\Sigma w$ 最小时，VaR 取到最小值。此时

$$VaR = Z_a\sqrt{\frac{A\mu_0^2 - 2B\mu_0 + C + f_0^2\Delta F}{\Delta}} + \mu_0$$

即

$$\frac{Bz_\alpha^2 + \Delta VaR + z_a\sqrt{\Delta\left[A(VaR)^2 + 2B(VaR) + C - z_\alpha^2 + f_0^2(\Delta F\text{-}Az_\alpha^2)\right]}}{Az_a^2 - \Delta}$$

（原：$\mu_0 = \dfrac{Bz_\alpha^2 + \Delta VaR + z_a\sqrt{\Delta\left[A(VaR)^2 + 2B(VaR) + C - z_\mu^2\right]}}{Az_a^2 - \Delta}$）

其有效前沿对比未考虑借贷资本的模型变动情况：

若 $\Delta F\text{-}Az_\alpha^2$ 大于 0，则有效前沿上移；若 $\Delta F\text{-}Az_\alpha^2$ 小于 0，则有效前沿下移；

9、结合本章最优化理论，基于风险资产的收益率和波动率风险，下载中国现实数据，构建一个最优投资组合。在上述投资组合中，考虑引入无风险资产后的最优化资产配置，结合数据说明问题。

答：题 7 答案中所举投资组合为例，考虑引入无风险资产后的最优化资产配置。

范例程序：

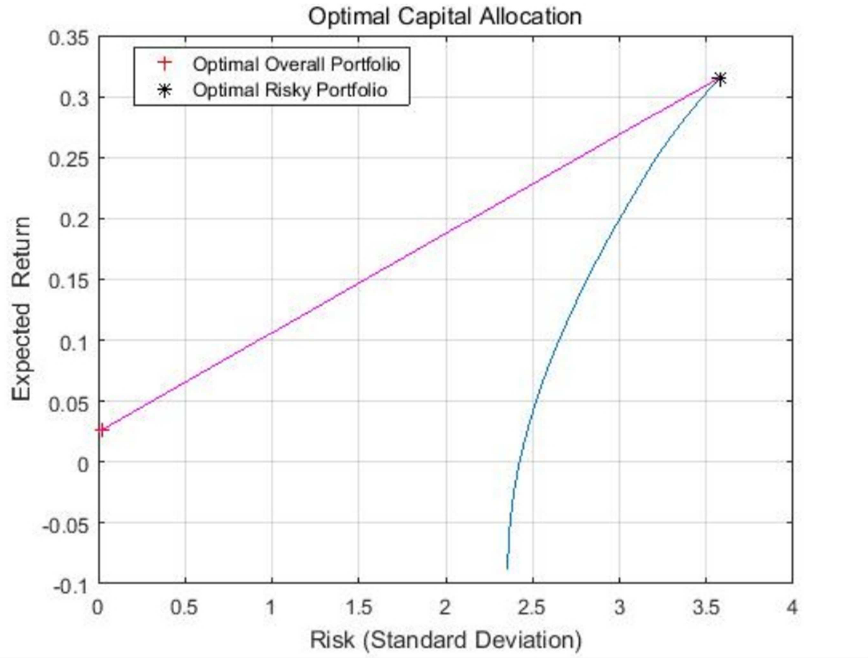
```
%% 第三步，包含无风险资产的投资组合配置
risklessrate=0.025;
borrowrate=0.025;
riskaversion=2;
numports=40;
[portrisk,portreturn,wights]=portopt(returns,covariances,numports);
portalloc(portrisk,portreturn,wights,risklessrate,riskaversion);
```

```
[riskyrisk,riskyreturn,riskywts,riskyfraction,overallrisk,...
overallreturn]=portalloc(portrisk,portreturn,wights,risklessrate,borrowrate,riskaversion)

%% 第四步：有约束模型下的多种风险资产的投资组合配置（允许卖空）
covariances=cov(ret)
columns=size(ret,2);
L=ones(columns, 1);
A=L'*inv(covariances)*L
miu=returns'
miu0=0.15;
B=L'*inv(covariances)*miu
C=miu'*inv(covariances)*miu
delta=det(A*C-B*B)
lamdda=(C-miu0*B)/delta
gamma=(miu0*A-B)/delta
weight=lamdda*inv(covariances)*L+gamma*inv(covariances)*miu
%% 第五步：有约束模型下包含无风险资产和多种风险资产的投资组合配置（允许卖空）
rf=0.05;
D=(miu0-rf)/((miu-rf*L)'*inv(covariances)*(miu-rf*L));
weightgg=D*inv(covariances)*(miu-rf*L)
weightf=1-sum(weightgg)
%% 第六步：有约束模型下多种风险资产的投资组合配置（不允许卖空）
[weightc,varc]=quadprog(covariances,zeros(columns,1),-eye(columns,columns),zeros(columns,1),[ones(1,columns);miu'],[1;miu0])
%% 第七步：有约束模型下无风险资产和多种风险资产的投资组合配置（不允许卖空）2
% rf=0.05;
columnsf=columns+1;
miuf=[miu' rf];
row=size(ret,1);
retf=[a_ret,b_ret,c_ret rf*ones(row,1)];
covariancesf=cov(retf)
[weightcf,varcf]=quadprog(covariancesf,zeros(columnsf,1),-eye(columnsf,columnsf),zeros(columnsf,1),[ones(1,columnsf);miuf],[1;miu0])
```

第三步：引入无风险资产后的最优资产配置

有效前沿投资组合的最优资产分配：



riskyrisk =3.5765

riskyreturn =0.3155

riskywts =0（002594 比亚迪）

1（002792 通宇通讯）

0（300096 易联众）

riskyfraction =0.0114

overallrisk =0.0406

overallreturn =0.0283

第四步：约束条件下的投资组合配置

协方差矩阵：

Covariances:	002594	002792	300096
002594	10.9806	5.1305	2.6537
002792	5.1305	12.7913	4.0608
300096	2.6537	4.0608	7.5331

A =0.1799

miu =

-0.0230

0.3155

-0.2206

B = -0.0158

C =0.0253

delta =0.0043

lamdda =6.4309

gamma =9.9268

weight =

0.2478（002594 比亚迪）

0.5999（002792 通宇通讯）

0.1523（300096 易联众）

第五步：有约束模型下包含无风险资产和风险资产的投资组合（允许卖空）

D=3.6544

weightgg =

-0.0506（002594 比亚迪）

0.1595（002792 通宇通讯）

-0.1994（300096 易联众）

weightf =1.0905

第六步：约束条件下的投资组合配置（不允许卖空）

weightc =

0.2478（002594 比亚迪）

0.5999（002792 通宇通讯）

0.1523（300096 易联众）

varc =3.9600

第七步：有约束模型下包含无风险资产和风险资产的投资组合（不允许卖空）

weightcf =

0.0000（002594 比亚迪）

0.3766（002792 通宇通讯）

0.0000（300096 易联众）

0.6234（无风险资产）

varcf =0.9070

数据来源：根据 Matlab 程序结果整理得出

10、计算推导均值-VaR 最优化问题模型（分只有风险资产、包含资产风险和无风险资产两种情形）求解；推导存在卖空限制下的均值-VaR 最优化问题模型；推导均值-ES 最优化问题模型（分只有风险资产、包含资产风险和无风险资产两种情形）求解。并将上述模型求解给出 Python 或其他软件编程。

答：略。

11、结合中国实际数据，实验检验基于均值-方差、均值-VaR 以及均值-ES 模型下最优资产配置的差异，并分析持仓未来一段时间收益情况的差异。

答：以存在卖空限制均值-VaR 最优化问题模型为例（选取 10 只股票）

范例程序：

```
clear all;close all;clc;
a_ret=xlsread('002594.xlsx','b700:b730');
b_ret=xlsread('002792.xlsx','b700:b730');
c_ret=xlsread('300096.xlsx','b700:b730');
d_ret=xlsread('300549.xlsx','b700:b730');
e_ret=xlsread('300630.xlsx','b700:b730');
f_ret=xlsread('300650.xlsx','b700:b730');
g_ret=xlsread('600098.xlsx','b700:b730');
h_ret=xlsread('600519.xlsx','b700:b730');
i_ret=xlsread('600585.xlsx','b700:b730');
j_ret=xlsread('601818.xlsx','b700:b730');
%% 第一步，计算收益率均值和协方差
%方法一：用 cov 计算协方差，用 mean 计算均值

a_v=cov(a_ret);
b_v=cov(b_ret);
c_v=cov(c_ret);
ret=[a_ret,b_ret,c_ret,d_ret,e_ret,f_ret,g_ret,h_ret,i_ret,j_ret];
covariances=cov(ret)
returns=mean(ret)
[expsigma,expcorrc]=cov2corr(covariances);

%% 第二步：有约束模型下的多种风险资产的投资组合配置（允许卖空）

L=ones(10, 1);
A=L'*inv(covariances)*L
miu=returns'
B=L'*inv(covariances)*miu
C=miu'*inv(covariances)*miu
delta=det(A*C-B*B)
Za=2.33
VaR=(sqrt(A*Za^2-delta)-B)/A
miu0=(B*Za^2+delta*VaR+Za*sqrt(delta*(A*VaR^2+2*B*VaR+C-Za^2)))/(A*Za^2-delta)
weight=((C-B*miu0)*inv(covariances)*L+(A*miu0-B)*inv(covariances)*miu)/delta
```

```
%% 第三步：有约束模型下包含无风险资产和多种风险资产的投资组合配置（允许卖空）
rf=0.05;
H=(miu-rf)'*inv(covariances)*(miu-rf)
weightgg=((miu0-rf)*inv(covariances)*(miu-rf))/H;
weightf=1-sum(weightgg)
```

股票：002594（比亚迪）、002792（通宇通讯）、300096（易联众）、300549（优德精密）、300630（普利制药）、300650（太龙照明）、600098（广州发展）、600519（贵州茅台）、600585（海螺水泥）、601818（光大银行）

数据：2020.09.10-2020.10.30 股票收盘价

假定：$Z_\alpha = 2.33$，r_f=5%

（1）只有风险资产的情况

股票	权重	股票	权重
002594	0.0475	300650	-0.0840
002792	-0.1143	600098	0.9203
300096	0.0066	600519	-0.0213
300549	0.0288	600585	0.1804
300630	-0.1798	601818	0.2158

数据来源：根据 Matlab 程序结果整理得出

（2）包含风险资产和无风险资产的情况

股票	权重	股票	权重		权重
002594	0.0106	300650	-0.0012	无风险资产	1.0233
002792	-0.0021	600098	-0.0373		
300096	0.0014	600519	-0.0052		
300549	0.0033	600585	-0.0143		
300630	-0.0032	601818	0.0275		

数据来源：根据 Matlab 程序结果整理得出

基于均值-方差以及均值-ES 模型下最优资产配置求解过程类似上述过程，在此不再赘述。