第三章课后习题答案

1、略。

2、证明：

以 GARCH（1，1）模型为例，GARCH（1，1）模型的均值方程和条件方差方程为：$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t = \sigma_t e_t$，$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$。计算无条件均值为 $E(\varepsilon_t) = 0$，无条件方差为 $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) = E(\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2)$，即 $Var(\varepsilon_t) = \dfrac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ 为常数。

3、略。

4、解：

（1）由 $E(\varepsilon_t) = E\left[E\left(\varepsilon_t \middle| \Phi_{t-1}\right)\right] = E\left[\sigma_t E(e_t | \Phi_{t-1})\right] = 0$ 可知，ε_t 的无条件均值为 0。其次 ε_t 的无条件方差是 $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E\left[E\left(\varepsilon_t^2 \middle| \Phi_{t-1}\right)\right] = E(\sigma_t^2) = E\left[\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2\right] = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$，因为 ε_t 是平稳过程且 $E(\varepsilon_t) = 0$，因此有 $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$，$Var(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(\varepsilon_t)$，即 $Var(\varepsilon_t) = \alpha_0 / 1 - \alpha_1$。为研究 ε_t 的尾部性质，我们要求 ε_t 的四阶矩是有限的，由于 e_t 是一个白噪音，因此，$E(e_t^4 | \Phi_{t-1}) = 3$，$E(\varepsilon_t^4 | F_{t-1}) = E(\sigma_t^4 e_t^4 | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^4 E(e_t^4 | \Phi_{t-1}) = 3\sigma_t^4$，无条件的四阶矩为 $E(\varepsilon_t^4) = E\left[E(\sigma_t^4 | \Phi_{t-1})\right] = 3E\left[(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2)^2\right] = 3\left[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^4)\right]$。因为 ε_t 是四阶平稳的，即 $E(\varepsilon_t^4) = E(\varepsilon_{t-1}^4)$，则 $\left(1 - 3\alpha_1^2\right) E\left(\varepsilon_t^4\right) = 3\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)$，即 $E\left(\varepsilon_t^4\right) = \dfrac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$。

（2）由 $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2$ 可知，对给定的样本，ε_t^2 是 σ_t^2 的无偏估计。因此，我们期望 ε_t^2 以 1 阶自回归模型的方式与 ε_{t-1}^2 线性相关。从另一个角度，定义 $\eta_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$，那么可以证明 $\{\eta_t\}$ 是均值为零的不相关序列，于是 ARCH 模型变为：$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \eta_t$，这就是 ε_t^2 表示成 AR（1）的形式，但是 $\{\eta_t\}$ 不是独立同分布的序列。

5、略。

6、略。

7、略。

8、略。

9、略。

10、略。