第九章 课后习题答案

1.答案：

（1）

期限（年）	现金流（美元）	现值	权重	时间*权重	时间^2*权重
1	12	10.6430	0.1093	0.1093	0.1093
2	12	9.4395	0.0970	0.1939	0.3879
3	12	8.3721	0.0860	0.2580	0.7740
4	12	7.4254	0.0763	0.3051	1.2204
5	112	61.4669	0.6314	3.1571	15.7855
总计	160	97.3470	1.0000	4.0235	18.2772

在连续复利下修正久期与麦考利久期相同，因此，该债券的麦考利久期也为4.0646 年，即 $D=D^{*}=4.0235$；而美元久期即为 $DD=4.0235\times 97.3470=391.6746$。

（2）

$$\Delta B=-97.3470\times 4.0235\times 0.02\text{=-}7.8335$$

$$B^{'}=97.3470\text{-}7.8334=89.5135$$

因此，用久期计算的债券的价格为89.5135。

（3）

$$\begin{aligned}\Delta B&=\text{-DB}\Delta y+\frac{1}{2}\text{CB}\left(\Delta y\right)\\&=\text{-}4.0235\times 97.3470\times 0.02+\frac{1}{2}\times 18.2772\times 97.3470\times 0.02^{2}\\&=-7.4776\end{aligned}$$

$$B^{'}=97.3470\text{-}7.4776=89.8694$$

因此，用凸性计算的债券的价格为89.8694。

（4）

$$B^{'}=12\text{e}^{-0.14\times 1}+12\text{e}^{-0.14\times 2}+12\text{e}^{-0.14\times 3}+12\text{e}^{-0.14\times 4}+112\text{e}^{-0.14\times 5}=89.8583$$

$$\Delta B=\text{B}_{14\%}-\text{B}_{12\%}=89.8583-97.3470=-7.4887$$

可见，曲率计算债券价格相较于久期更加准确。

2.答案：

上述两笔现金流的现值为：

$$PV_{1/2}=\frac{100\times0.5+100\times13\%\times0.5}{1+13\%\times0.5}=\frac{56.5}{1+6.5\%}=53.05$$

$$PV_{1}=\frac{50+50\times13\%\times0.5}{(1+13\%\times0.5)^{2}}=\frac{53.25}{(1+6.5\%)^{2}}=46.95$$

因此，以现金衡量的现金流量的相对重要性分别为：

$$X_{1/2}=\frac{PV_{1/2}}{P}=\frac{53.05}{100}=53.05\%$$

$$X_{1}=\frac{PV_{1}}{P}=\frac{46.95}{100}=46.95\%$$

现在利用每笔现金流的现值在资产价格中所占比例作为每笔现金流支付时间的权重，对金融资产每笔现金流的支付时间进行加权平均来计算久期：

$$D=X_{1/2}\times\frac{1}{2}+X_{1}\times1=53.05\%\times\frac{1}{2}+46.95\%\times1=0.7347$$

因此，该资产的久期为 0.7347。也就是收回这笔 100 万元贷款的 53.05%需要半年，收回这笔贷款的 46.95%需要一年，收回这笔 100 万元贷款的平均期限是 0.7347 年。

3. 答案：

30 年期债券，从第 6 年末到 30 年末支付的现值（在第 5 年年初）为：

$$P_{A1}=\sum_{t=1}^{25}\frac{70}{1.08^{t}}+\frac{1000}{1.08^{25}}=893.25$$

从开始到第 5 年的 5 次支付在第 5 年年初的终止为：

$$P_{A2}=\sum_{t=1}^{5}70\times1.06^{t-1}=394.60$$

因此，总收入：$P_{A}=P_{A1}+P_{A2}=893.25+394.60=1287.85$

5 年的收益为：$1287.85/867.42=1.4847$，年均 $(1.4847^{1/5}-1)*100\%=8.22\%$

同理，计算 20 年期和 10 年期债券，并且进行收益率比较即可。

4. 答案：

收益率的 VaR 为：

$$VaR(\Delta y)=\sigma\times N^{-1}(X)=1\%\times N^{-1}(92)=0.01\times1.4051=0.0141$$

收益率的 ES 为：

$$ES(\Delta y)=\sigma\frac{\phi\left(N^{-1}(X)\right)}{1-X}=1\%\times\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{N^{-1}(92\%)^{2}}{2}}}{1-92\%}=0.0186$$

组合的修正久期为：

$$D^{*}=5\times\frac{20}{40}+15\times\frac{20}{40}=10$$

该投资组合的美元久期为组合的修正久期与组合价值的乘积即：10×40=400 美元

该债券组合的 VaR 为：

$$VaR\left(dp\right)=\left|-D^{*}\times P_{0}\right|\times VaR\left(\Delta y\right)=\left|-10\times 40\right|\times 0.0141=5.6203$$

该债券组合的 ES 为：

$$ES\left(dp\right)=\left|-D^{*}\times P_{0}\right|\times ES\left(\Delta y\right)=\left|-10\times 40\right|\times 0.0186=7.4333$$

5.答案：

（1）

$$P_{A}=\frac{12}{1.15^{1}}+\frac{12}{1.15^{2}}+\frac{112}{1.15^{3}}=93.15$$

$$P_{B}=\frac{6}{1.15^{1}}+\frac{6}{1.15^{2}}+\frac{106}{1.15^{3}}=79.45$$

$$P_{C}=\frac{100}{1.15^{3}}=65.75$$

$$P_{D}=\frac{100}{1.15}=86.96$$

（2）

$$D_{A}=\left(\frac{12\times 1}{1.15^{1}}+\frac{12\times 2}{1.15^{2}}+\frac{112\times 3}{1.15^{3}}\right)\div 93.15=2.6785\text{年}$$

$$D_{B}=\left(\frac{6\times 1}{1.15^{1}}+\frac{6\times 2}{1.15^{2}}+\frac{106\times 3}{1.15^{3}}\right)\div 79.45=2.8116\text{年}$$

$$D_{C}=3\text{年}$$

$$D_{D}=1\text{年}$$

（3）证券 C 的久期最大，因此对价格最为敏感。

（4）

只有 D 债券的久期小于 2 年，故应该选择 D 债券。建立方程：

负债的现值为$\frac{2000000}{1.15^{2}}=1512287.335\text{万元}$，设应买入债券 C 数量为 x，买入债券 D 数量为 y，则$\begin{cases}65.75x+86.96y=1512287.335\\3\times 65.75x+86.96y=2\times 1512287.335\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=11500\\y=8695\end{cases}$，因此买入债券 C 数量为 11500，买入债券 D 数量为 8695。

6.答案：

（1）债券 A 的收益率更低，息票率也较低，两者都使得它比 B 的久期更长。而且 A 不可赎回，这将使得它的到期期限至少与 B 一样长，也使得久期随之增加，故债券 B 的久期更

短。

（2）债券 B 的到期收益率高于债券 A，因为 B 的息票支付额和到期期限等于 A，而 B 的价格更低，故债券 B 的久期更短。

7. 答案：

（1）

债券的 PV=10000 美元 X 年金现值系数（10%，3）

即 $PV=10000\times2.486=24860$ 美元。

期限（年）	现金流（美元）	现值	权重	时间*权重
1	10000	9048.3742	0.3672	0.3672
2	10000	8187.3075	0.3322	0.6644
3	10000	7408.1822	0.3006	0.9018
总计	30000	24643.8639	1.0000	1.9334

因此，该债务久期为 1.9334 年。

（2）要使我的债务免疫，我需要一个到期期限为 1.9334 年的零息债券。因为现在的现值必须为 24860 美元，面值（即未来的赎回价）为 $24860\times1.10^{1.9334}=29890.38931$ 美元。

（3）如果利率上升到 12%，零息债券价值下降为

$29890.38931\div1.12^{1.9334}=24008.84517$ 美元

债务的现值下降为：债券的 PV=10000 美元 X 年金现值系数（12%，3），

即 $PV=10000\times2.401=24010$ 美元

净头寸下降 1.1548。因此，净头寸变化的理由在于随着利率变动，支付后现金流的久期也变动。

8. 答案：

首先，计算该债务流的现值：

$$PV=\frac{600}{1+7.67\%}+\frac{1000}{(1+8.27\%)^2}+\frac{600}{(1+8.81\%)^3}+\frac{500}{(1+9.31\%)^4}+$$
$$\frac{200}{(1+9.75\%)^5}+\frac{100}{(1+10.16\%)^6}+\frac{100}{(1+10.52\%)^7}+\frac{50}{(1+10.85\%)^8}$$
$$=2479.42\text{万元}$$

其次，计算现金流久期：

$$D=\frac{\frac{600}{1+7.67\%}\times 1+\frac{1000}{(1+8.27\%)^2}\times 2+\frac{600}{(1+8.81\%)^3}\times 3+\frac{500}{(1+9.31\%)^4}\times 4+\frac{200}{(1+9.75\%)^5}\times 5+\frac{100}{(1+10.16\%)^6}\times 6+\frac{100}{(1+10.52\%)^7}\times 7+\frac{50}{(1+10.85\%)^8}\times 8}{2479.42}$$

$=2.64$

假设所需 A 债券为 x，B 债券为 y，则债券 A 和 B 的收益率分别为

$$PV_A=\sum_{i=1}^{12}\frac{6}{\left(1+r_A\right)^i}+\frac{100}{\left(1+r_A\right)^{12}}=65.95\Rightarrow r_A=11.326\%$$

$$PV_B=\sum_{i=1}^{5}\frac{10}{\left(1+r_B\right)^i}+\frac{100}{\left(1+r_B\right)^{5}}=101.666\Rightarrow r_B=9.567\%$$

债券 A 和 B 的久期分别为：

$$D_A=\left(1+r_A\right)\times D_A^*=(1+11.326\%)\times 7.07=7.87$$

$$D_B=\left(1+r_B\right)\times D_B^*=(1+9.567\%)\times 3.80=4.16$$

则 $\begin{cases}65.95x+101.66y=2479.42\\ \frac{x}{x+y}\times 7.87+\frac{y}{x+y}\times 4.16=2.64\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-8.735\text{万张}\\ y=30.056\text{万张}\end{cases}$

因此，应该买入 B 债券 30.056 万张，卖出 A 债券 8.735 万张。

9. 答案：

首先，计算一份期货合约的价值为：

$V=93.0625\%\times 100000=93062.5$ 美元

其次，计算市场利率上升 1 个基点时，一份期货合约的价值变动为:

$\Delta P_T=-9.2\times 93062.5\times 0.01\%=-85.62$ 美元，

再次，计算当市场利率上升 1 个基点时，投资者持有的债券组合的价值变动为：

$\Delta P_P=-6.8\times 10^7\times 0.01\%=-6800$ 美元

最后，假设持有 N 份期货合约才能对冲市场利率波动的风险，当市场利率上升 0.01%时，在免疫策略下新组合的价值变动应该为零(利率变动对于债券价值影响为 0)，即：

$\Delta P_P+N\times\Delta P_T=0$

因此，投资者需要持有的期货合约的份数：

$$N=-\frac{\Delta P_P}{\Delta P_T}=-\frac{D_P^*\times P_P}{D_T^*\times P_T}=-\frac{6800}{85.62}=-79.42$$

结论：在当前时刻，投资者需要卖出 79 份国债期货合约才能使得手中持有的 1000 万美元资产组合不受利率波动的影响。

10. 答案：

（1）计算该银行的久期缺口。

资产					
项目	金额/百万元	权重	久期	权重*久期	价值久期
现金	100	0.04	0	0	0
短期贷款	300	0.12	0.8	0.096	240
中期贷款	500	0.2	3	0.6	1500
长期贷款	1600	0.64	12	7.68	18000
总计	2500	1	15.8	8.376	20940

负债与权益					
项目	金额/百万元	权重	久期	权重*久期	价值久期
存款	600	0.333	0	0	0
短期债务	400	0.222	0.5	0.111	200
中期债务	400	0.222	4	0.889	1600
长期债务	400	0.222	8	1.778	3200
总计	1800	1	12.5	2.778	5000
权益	700				15940

由此，资产的久期：$D_A = 8.376$年，负债的久期：$D_L = 2.778$年

久期的缺口为：$D_{Gap} = D_A - D_L \dfrac{V_L}{V_A} = 8.376 - 2.778 \times \dfrac{1800}{2500}$=6.376年

（2）使用价值久期计算：

$$\Delta V_E = -D_A V_A \Delta y + D_L V_L \Delta y = -20940 \times 1\% + 1800 \times 1\% = -191.40\text{百万元}$$

该金融机构的总权益价值将减少 191.40 百万元。

（3）反之，向下平移 1%时，金融机构的总权益价值将增加 191.40 百万元。

（4）该金融机构应该增大负债久期，缩短资产的久期，具体来说可以借入长期负债或者避免贷出长期资金，增加短期国库券等短期资产，即增大负债减小资产。

11. 答案：

组合的久期计算为：$D = \dfrac{99.52}{99.52 + 91.37} \times 0.483 + \dfrac{91.37}{99.52 + 91.37} \times 1.875 = 1.014$，需要注意的是计算债券组合的久期时往往假设各个债券的到期收益率是一样的。

12. 答案：

久期为：$D=\dfrac{612.91-567.46}{2\times589.66\times0.005}=7.7078$

这一计算结果表明，对于该债券，在收益率 10%时，利率每波动 100 个基点，债券的价格会逆向波动约 770.78 个基点。